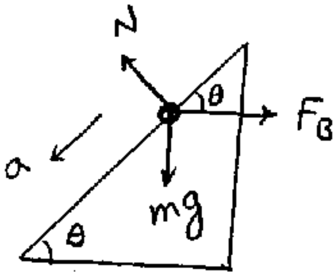


(۱

پس از شروع حرکت میله ، بنا به قانون فارادی یک جریان القایی در مدار خواهیم داشت که وقتی از روبرو نگاه کنیم جهت آن پادساعتگرد است .

درنتیجه یک نیروی مغناطیسی به میله حامل جریان مانند F_B وارد می‌شود.

(آ

$$mg\sin\theta - F_B\cos\theta = ma$$

$$F_B = iBd$$

اگر ε نیروی محرکه القایی باشد $q(t) = C\,\varepsilon(t)$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = Bdv\cos\theta$$

و $i = \frac{dq}{dt}$ که

$$i = CBda\cos\theta$$

v سرعت لحظه‌ای میله و $a = \frac{dv}{dt}$ شتاب لحظه‌ای میله است.

از روابط فوق :

$$mg\sin\theta - CB^2d^2a\cos^2\theta = ma$$

$$a = \frac{m\sin\theta}{m + CB^2d^2\cos^2\theta}\,g \Rightarrow v = \sqrt{2al} \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{\frac{2lg\sin\theta}{1+\frac{C}{m}(Bd\cos\theta)^2}}}$$

(ب

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2l\left(1+\frac{C}{m}(Bd\cos\theta)^2\right)}{g\sin\theta}}}$$

(پ

$$q_f = CBdv_f\cos\theta \Rightarrow \boxed{q_f = (CBd\cos\theta)\sqrt{\frac{2lg\sin\theta}{1+\frac{C}{m}(Bd\cos\theta)^2}}}$$

(ت

$$\boxed{v_f = 0.96\ m/s \qquad t = 0.21\ s \qquad q_f = 662\ \mu C}$$

۲)

اگر P_r ، V_r و T_r فشار، حجم و دمای مطلق نهایی گاز محفظه‌ی سمت راست باشد:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_r V_r}{T_r}$$

همچنین گاز محفظه‌ی سمت راست طی یک فرآیند بی‌دررو به وضعیت نهایی رسیده است، پس

$$P_0 V_0^{\gamma} = P_r V_r^{\gamma}$$

که $P_r = \frac{27}{8} P_0$ است و $\gamma = \frac{3}{2}$. از معادلات اخیر خواهیم داشت

$$V_r = \frac{4}{9} V_0 \quad \text{و} \quad \boxed{T_r = \frac{3}{2} T_0}$$

۳)

ب) برای گاز سمت راست بنا به قانون اول ترمودینامیک

$$\Delta U = Q + W$$

از آنجا که در فرآیند بی‌دررو $Q = 0$ ، لذا

$$\Delta U = W$$

$$\Delta U = n C_v \left(\frac{3}{2} T_0 - T_0 \right)$$

اما برای گاز کامل $C_p - C_v = R$ و $\frac{3}{2} = \gamma = \frac{C_p}{C_v}$ در نتیجه

$$C_v = 2R \, , \quad C_p = 3R$$

سرانجام

$$\boxed{W = nRT_0}$$

پ) اگر P_L ، V_L و T_L فشار، حجم و دمای نهایی گاز محفظه‌ی سمت چپ باشد

$$P_L = \frac{27}{8} P_0 \quad \text{و} \quad V_L = V_0 + \frac{5}{9} V_0 = \frac{14}{9} V_0$$

$$\frac{P_L V_L}{T_L} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \Rightarrow \boxed{T_L = \frac{21}{4} T_0}$$

ت) $\Delta U_r = W_r + Q_r \quad \Leftarrow \quad Q_r = \Delta U_r - W_r$

$$= \Delta U_r + W_L$$

$$= n C_v \left(\frac{21}{4} T_0 - T_0 \right) + nRT_0$$

$$\boxed{Q_r = \frac{19}{2} nRT_0}$$

ث) اگر $\bar{C}_v$ و $\bar{C}_p$ ظرفیت گرمایی مولی در حجم ثابت و فشار ثابت برای مخلوط دو گاز باشند:

$$n_1 C_{v_1} \Delta T + n_2 C_{v_2} \Delta T = (n_1 + n_2) \bar{C}_v \Delta T$$

اما برای هر گاز، مثلاً نوع ۱: $C_{p_1} - C_{v_1} = R$ و $\frac{C_{p_1}}{C_{v_1}} = \gamma_1 \quad \Leftarrow \quad C_{v_1} = \frac{R}{\gamma_1 - 1}$

برای گاز نوع ۲ به طور مشابه: $C_{v_2} = \frac{R}{\gamma_2 - 1}$

و برای مخلوط دو گاز: $\bar{C}_v = \frac{R}{\gamma - 1}$

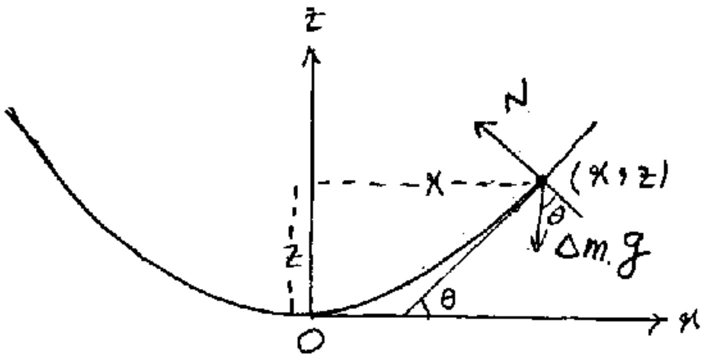
بنابراین با قرار دادن در معادلهٔ اول قسمت ت)

$$\frac{n_1 R}{\gamma_1 - 1} + \frac{n_2 R}{\gamma_2 - 1} = \frac{(n_1 + n_2) R}{\gamma - 1}$$

اما $\gamma = \frac{3}{2}$ ، $\gamma_1 = \frac{5}{3}$ و $\gamma_2 = \frac{7}{5}$ ، در نتیجه

$$\boxed{\frac{n_2}{n_1} = 1}$$

۳) نیروهای وارد بر جزء کوچکی از جیوه به جرم Δm واقع بر سطح جیوه $\Delta m g$ و N هستند که N بر سطح جیوه عمود است، اگر مماس بر سهمی در این نقطه زاویه‌اش با محور x، θ باشد داریم



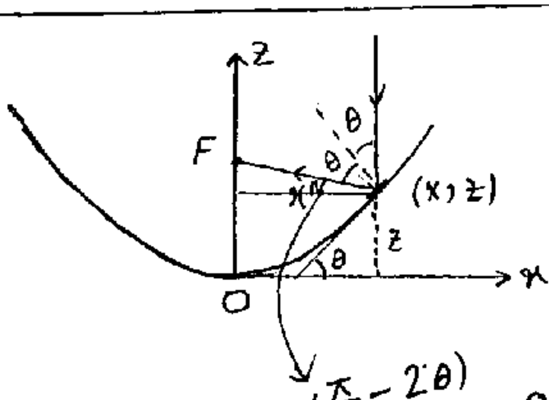
۲)

$$N - \Delta m\, g \cos\theta = 0$$
$$N \sin\theta = \Delta m\, x\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{tg\,\theta = \frac{x\omega^2}{g}}$$

ب) طبق گفته مسئله $tg\,\theta = 2ax$ در نتیجه بدار سهمی این مسئله $a = \frac{\omega^2}{2g}$ است و معادله سهمی خواهد شد $z = \frac{\omega^2}{2g} x$

ب) با توجه به مبدأ مختصات، در نقطه‌ای به مختصه z داخل جیوه فشار نسبت به سطح جیوه باید بیشتر باشد، از طرفی روی تمام نقاط سهمی فشار باید P_0 باشد، با توجه به معادله سهمی یعنی $z = \frac{\omega^2}{2g} x$ تنها امکان خواهد بود:

$$\boxed{P(x,z) = P_0 + \frac{\rho\omega^2 x^2}{2} - \rho g z}$$



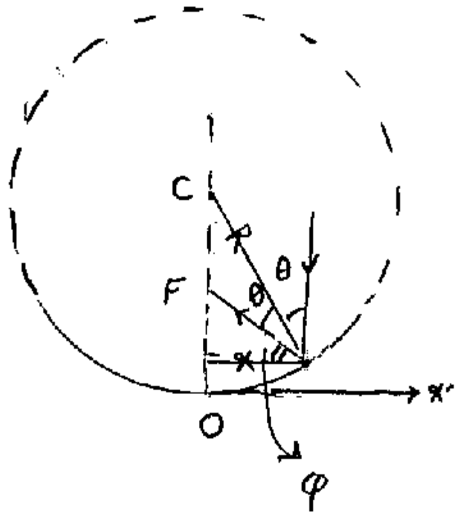
پ) مطابق شکل $OF = z + x\, tg\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$

$$= z + x\, cotg\, 2\theta$$
$$OF = z + x\frac{1 - tg^2\theta}{2\, tg\theta}$$

اما $z = ax^2$ ، $tg\theta = 2ax$ ، $a = \frac{\omega^2}{2g}$

در نتیجه:

$$OF = \frac{1}{4a} \Rightarrow \boxed{OF = \frac{g}{2\omega^2}}$$



ت) اگر R شعاع دایره‌ای باشد که در گودترین نقطه‌ی سهمی، بر سهمی مماس است.

مطابق شکل
$$\cos(\varphi+\theta) = \frac{x}{R}$$

که
$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

در نتیجه
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{x}{R}$$

$$\sin\theta = \frac{x}{R}$$

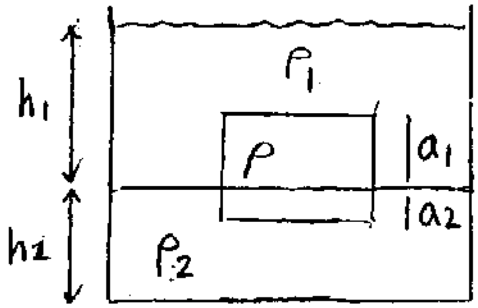
اما برای پرتوهای که، به نزدیکی گودترین نقطه می‌تابد θ کوچک است و لذا
$$tg\theta \approx \sin\theta$$

در نتیجه
$$tg\theta = 2ax = \frac{\omega^2}{g}x \quad \text{اما} \quad , \quad tg\theta \approx \frac{x}{R}$$

در نتیجه
$$\boxed{R \approx \frac{g}{\omega^2}}$$

۴)

۳) در حالت تعادل وزن مکعب مستطیل با نیروی ارشمیدس خنثی می‌شود، یعنی



$$\rho abcg = \rho_1 a_1 bcg + \rho_2 a_2 bcg$$

همچنین $a_1 + a_2 = a$

در نتیجه

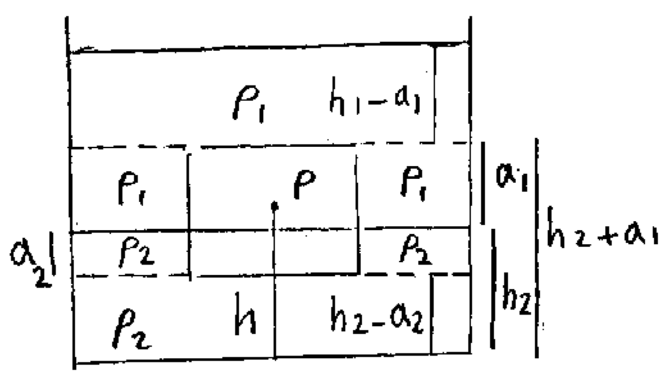
$$\boxed{a_1 = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1}\, a \quad , \quad a_2 = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\, a}$$

ب) انرژی پتانسیل هر قطعه، مکعب مستطیلی (شامل مکعب به چگالی ρ و مایع های ρ_1 و ρ_2) برابر است با

انرژی پتانسیل = (جرم)(g)(فاصله مرکز مکعب مستطیل تا کف)

با توجه به شکل زیر

$$U_a = \rho abc\, gh + \rho_2 A (h_2 - a_2) g \tfrac{1}{2}(h_2 - a_2) + \rho_1 A (h_1 - a_1) g \left(h_2 + a_1 + \tfrac{1}{2}(h_1 - a_1)\right) + \rho_1 (A - bc) a_1 g \left(h_2 + \tfrac{a_1}{2}\right) + \rho_2 (A - bc) a_2 g \left(h_2 - a_2 + \tfrac{a_2}{2}\right)$$



که

$$h = h_2 - a_2 + \frac{a}{2}$$

پس از ساده کردن:

$$\boxed{U_a = \frac{Ag}{2}\left(\rho_1 h_1^2 + \rho_2 h_2^2 + 2\rho_1 h_1 h_2\right) + g\left(\frac{abc(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)}{2(\rho_2 - \rho_1)}\right) a}$$

پ) با توجه به رابطه اخیر و این که $a < b < c$ خواهیم داشت

$$\boxed{U_a < U_b < U_c}$$

ت) در وضعیتی که مکعب به اندازهٔ x بالاتر از وضعیت تعادل خود است
برآیند نیروهای وارد بر مکعب صفر نیست، در نتیجه

$$-\rho abcg + \rho_1 (a_1 + x) bcg + \rho_2 (a_2 - x) bcg = \alpha m \ddot{x}$$

با توجه به قسمت ۲) که $-\rho abcg + \rho_1 a_1 bcg + \rho_2 a_2 bcg = 0$ و این که $m = \rho abc$
است خواهیم داشت

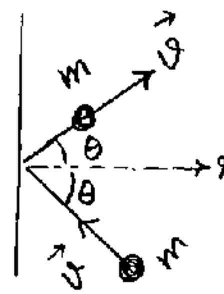
$$\boxed{\alpha \rho a \ddot{x} + (\rho_2 - \rho_1) g x = 0}$$

ث)

$$\boxed{\omega_a = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{\alpha \rho a}}}$$

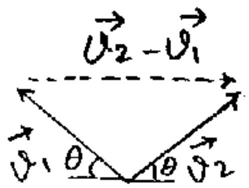
ج)

$$\boxed{\omega_c < \omega_b < \omega_a}$$

۵)


با توجه به این که دیوار فقط نیروی عمودی به ذره وارد می‌کند و انرژی ذره تلف نمی‌شود ذره با همان زاویه برخورد به دیوار، باید دیوار را ترک کند.

آ) طبق قانون دوم نیوتن: $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$



$$F_x = m\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{F_x = \frac{m\,2v\cos\theta}{t_2-t_1}}$$

ب) مانند قبل اگر در مدت T_2-T_1، تعداد n ذره هر یک با سرعت v به دیوار برخورد کنند، که l فاصله بین دو ذره همسایه است: $(T_2-T_1)v = nl$

در نتیجه مانند قبل

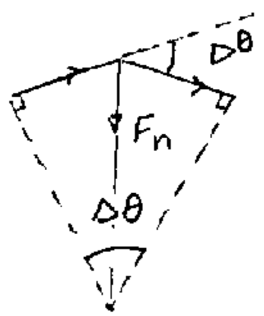
$$F_x = \frac{(nm)2v\cos\theta}{T_2-T_1}$$

$$\boxed{F_x = \frac{2mv^2\cos\theta}{l}}$$

پ) در حد $l \to 0$ و $\frac{m}{l} \to \lambda$

$$\boxed{F_x = 2\lambda v^2\cos\theta}$$

ت) از تشابه با قسمت قبل و شکل مقابل



$$F_n = 2\lambda v^2\cos\left(\frac{\pi-\Delta\theta}{2}\right)$$

$$F_n = 2\lambda v^2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

اما $\Delta\theta \ll 1$، در نتیجه $\sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$

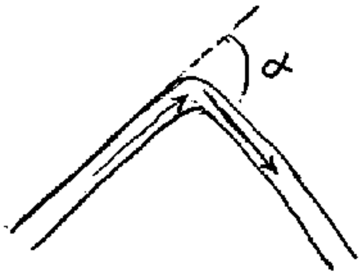
$$F_n = \lambda v^2\Delta\theta$$

اما $\lambda = \frac{m}{l}$ جرم واحد طول شده است، اگر سرعت آب v، عرض نهر w و چگالی آب ρ باشد، یعنی $\lambda = \frac{m}{l} = \frac{whv\Delta t\rho}{v\Delta t}$ $\quad \lambda = \rho wh$

در نتیجه $\boxed{F_n = \rho w h v^2 \Delta\theta}$

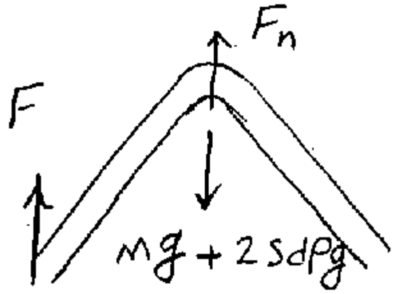
$P = \dfrac{F_n}{A}$ ، $A = (R\Delta\theta)h$ مساحت دیواره بیرونی

$$\boxed{P = \frac{\rho w v^2}{R}}$$



ث) از قسمت ت) دیدیم
نیروی وارد بر جریان آب داخل
لوله هنگام تغییر جهت به اندازه α
برابر است با $F_n = 2\lambda v^2 \sin\frac{\alpha}{2}$

نیروهای وارد بر لوله عبارت از Mg وزن لوله، $2ds\rho g$ وزن آب داخل لوله
و نیروی $2\lambda v^2 \sin\frac{\alpha}{2}$ و نیروی وارد بر نقطهٔ A که جهت آن ها
به صورت زیر است



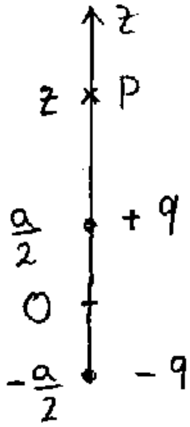
$$F = Mg + 2sd\rho g - F_n$$

و $\lambda = \rho s$

$$\boxed{F = (M + 2sd\rho)g - 2\rho s v^2 \sin\frac{\alpha}{2}}$$

۴)

آ) میدان الکتریکی در نقطهٔ P به مختصات $(0,0,z)$:



$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{(z-\frac{a}{2})^2} - \frac{q}{(z+\frac{a}{2})^2}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\left(\left(1-\frac{a}{2z}\right)^{-2} - \left(1+\frac{a}{2z}\right)^{-2}\right)$$

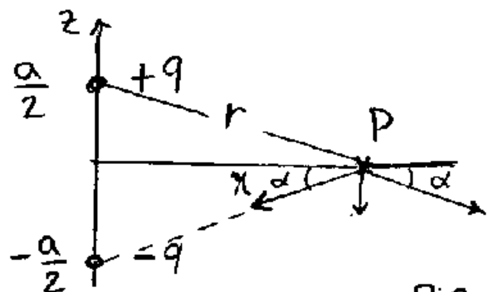
با استفاده از بسط داده شده در راهنمای مسئله:

$$E_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\left(\frac{2a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \cdots\right)$$

در حد $a \to 0$ و $aq \to P$ خواهیم داشت:

$$\boxed{E = \frac{2P}{4\pi\epsilon_0 |z|^3}}$$

ب)



$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}(-2\sin\alpha)$$

که $r = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$ ، $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$

$$E_P = \frac{-qa}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x^2+\frac{a^2}{4})^{3/2}} = \frac{-qa}{4\pi\epsilon_0 x^3}\left(1+\frac{a^2}{4x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

در حد $a \to 0$ ، $aq \to P$

$$\boxed{E_P = \frac{-P}{4\pi\epsilon_0 |x|^3}}$$

پ)

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(2\frac{q_1 q_2}{x} - 2\frac{q_1 q_2}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q_1 q_2}{x}\left(1 - \left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q_1 q_2}{x}\left(\frac{a^2}{2x^2} - \frac{3}{8}\frac{a^4}{x^4} + \cdots\right)$$

در حد $a \to 0$ ، $q_1 a \to P_1$ ، $q_2 a \to P_2$

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{P_1 P_2}{|x|^3}}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{x} - \frac{q_1 q_2}{x+a} - \frac{q_1 q_2}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{q_1 q_2}{\sqrt{(x+a)^2+a^2}} \right) \qquad (c$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x}\left(1 - \left(1+\frac{a}{x}\right)^{-1} - \left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\left(1+\frac{a}{x}\right)^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{x}\right)^4 + \cdots \right)$$

$q_2 a \to P_2$, $q_1 a \to P_1$, $a \to 0$ درحد

$$\boxed{U = 0}$$