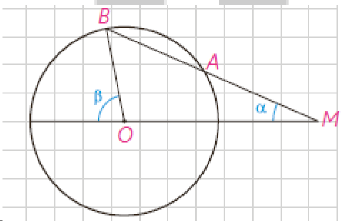
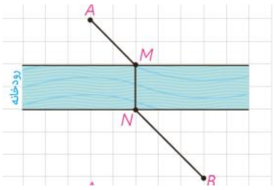
جمهوری اسلامی ایران نام و نام خانوادگی دانش آموز: وزارت آموزش و پرورش نوبت: دوم کد دانش آموز: اداره کل آموزش و پرورش استان مازندران مدت امتحان:۱۲۰دقیقه تاریخ امتحان: اداره آموزش و پرورش شهرستان سیمرغ استان مازندران ساعتامتحان: نام درس: هندسه ۲ پایه: یازدهم رشته: ریاضی طراح: فاطمه یوسف زاده صفحه:	مهر آموزشگاه

ردیف	سوال	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. الف) در حالت کلی انتقال ، شیب خط را حفظ می کند. ص غ ب) بازتاب، تبدیل همانی است. ص غ	۰/۵
۲	جاهای خالی را با کلمه یا عبارت مناسب پر کنید. الف)اگر نقطه ای بیرون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است. ب) دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، دو دایره .... می نامیم.	۰/۵
۳	گزینه درست را با علامت مشخص کنید. الف) شرط اینکه تجانس طولپا باشدبا نسبت تجانس K ، این است که................ ۱) $K=1$ ۲) $K=1$ ۳) $\|K\|=1$ ۴) $K>1$ ب)کدام تبدیل، مساحت شکل را حفظ نمی کند. ۱)دوران ۲)تجانس ۳)انتقال ۴)بازتاب	۰/۵
۴	قضایای زیر را ثابت کنید. الف)اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان روبه رو به آن زاویه. ب) در هر تبدیل طولپا، تبدیل یافته هر زاویه ، زاویه ای هم اندازه آن است. ج)تجانس، شیب خط را حفظ می کند. د) در هر مثلث دلخواه مانند ABC ، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه رو به آن برابر است با طول قطر دایره محیطی مثلث.($\hat{A}>90^\circ$). ه)در هر مثلث،نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه رو به آن زاویه را به نسبت اندازه های ضلع های آن زاویه تقسیم می کند.	۱ ۱ ۱ ۱ ۱
۵	دایره $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA=R$.نشان دهید $\beta=3\alpha$. 	۱
۶	طول شعاع های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی ان ها مساوی 6 و طول مماس مشترک داخلی آن ها $\sqrt{11}$ و طول خط المرکزین آن ها مساوی $3\sqrt{5}$واحد باشد.	۱
۷	یک ذوزنقه ،هم محیطی است و هم محاطی . ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن ها.	۱/۵
۸	نشان دهید دوران تبدیل طولپاست در حالتی که مرکز دوران O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه $A\hat{O}B$ بیشتر باشد.	۱
۹	الف)آیا در یک انتقال غیر همانی می توان نقاط ثابت تبدیل داشت؟ چرا؟ ب)اگر n ضلعی $A_1'A_2'...A_n'$ مجانس n ضلعی $A_1A_2...A_n$ باشد، نشان دهید این دو n ضلعی با هم متشابه هستند.	۲

۱۰

اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟



۱

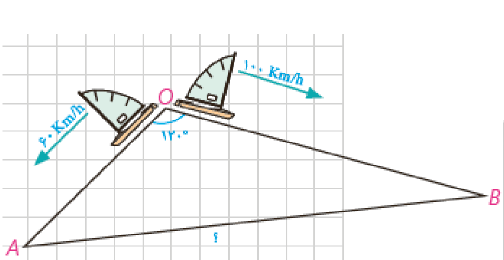
۱۱

ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC $\left(A=90^\circ\right)$ با ارتفاع $AH=h_a$ داریم: $\frac{1}{{h_a}^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

۱

۱۲

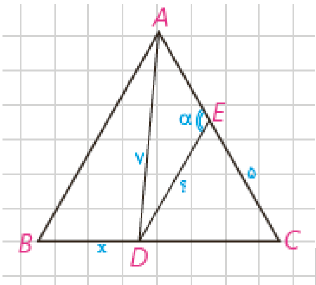
دو قایق از یک نقطه در دریاچه ای با سرعت های $60km/h$ و $100km/h$ و با زاویه 120° از هم دور می شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله ای از یکدیگر هستند؟



۱

۱۳

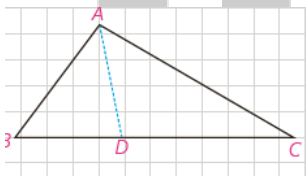
در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه D، که به فاصله ۷ واحد از راس A قرار دارد از B و C چه فاصله ای دارد؟ $\left(CD>BD\right)$ نقطه E، که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله ای است؟



۱/۲۵

۱۴

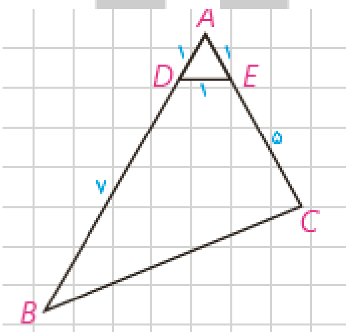
در مثلث ABC، $AB=4$، $AC=5$ و $BC=8$ است. طول نیمساز زاویه A را بیابید.



۱/۵

۱۵

در شکل مقابل، مساحت چهار ضلعی $DECB$ را بیابید.



۱/۲۵

موفق باشید

نمره ورقه	با عدد		نمره تجدید نظر	با عدد	
	با حروف			با حروف	
نام دبیرو امضاء :		تاریخ:	نام دبیرو امضاء :		تاریخ:

پاسخنامه تشریحی سوالات

۱-الف (ص) ب(غ)

۲-الف)بزرگتر از   ب)متداخل

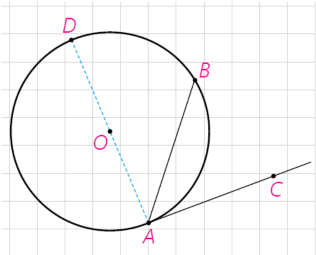
۳-الف) گزینه ۳   ب)گزینه ۲

۴-الف)دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

۱-اگر زاویه ظلی حاده باشد :

اثبات: از A ، قطر AD را رسم می کنیم در این صورت $D\hat{A}C = 90^\circ$ و در نتیجه $D\hat{A}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ (۱).از طرفی زاویه DAB یک زاویه محاطی است.در نتیجه: $D\hat{A}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DB}$ (۲).

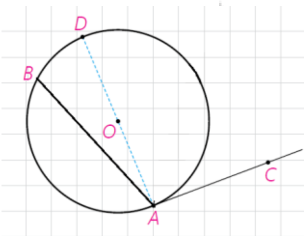
(۱)-(۲)= $D\hat{A}C - D\hat{A}B = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BD}\right) \Rightarrow B\hat{A}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$



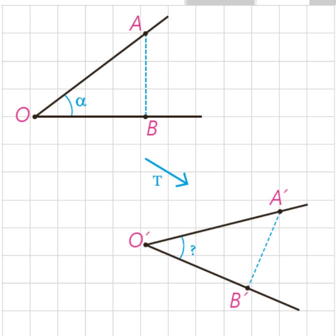
۲-اگر زاویه ظلی منفرجه باشد:

اثبات: $D\hat{A}C = 90^\circ$ و در نتیجه $D\hat{A}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ (۱).از طرفی زاویه DAB یک زاویه محاطی است.در نتیجه: $D\hat{A}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DB}$ (۲).

(۱)+(۲)= $D\hat{A}C + D\hat{A}B = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BD}\right) \Rightarrow B\hat{A}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$



ب)می خواهیم نشان دهیم هر تبدیل طولپا اندازه زاویه را حفظ می کند . فرض کنید T تبدیلی طولپاست.



$T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ و $T(O) = O'$ و $A\hat{O}B = \alpha$.حال دو مثلث AOB و $A'O'B'$ را در نظر می گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ OA = O'A' \\ OB = O'B' \end{array}\right\} \overset{\text{ضضض}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{A'O'B'} \Rightarrow A\hat{O}B = A'\hat{O}'B' = \alpha$$

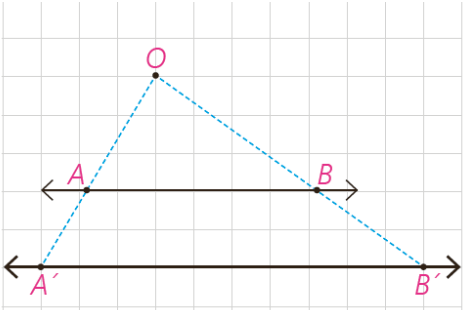
ج)دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

۱)نقطه O روی خط AB است.

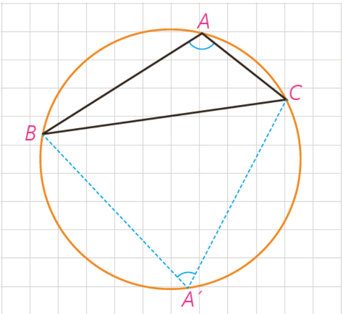
در این حالت بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس های نقاط A و B روی خط AB واقع می شوند، بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب خط تغییر ی نمی کند.

۲)نقطه O غیر واقع بر خط AB است.در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب مجانس های A و B باشند،طبق تعریف داریم:

$\begin{matrix} OA' = K.OA \\ OB' = K.OB \end{matrix}$ در نتیجه : $K = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{OA'}{OA}$ بنابراین $AB \parallel A'B'$. پس در این حالت نیز خط وتصویرش با هم موازیند وشیب دو خط با هم برابر است.



د) اثبات:نقطه دلخواه A' روی کمان BC را به B و C وصل می کنیم. زوایای $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ نسبت به هم مکمل هستندچون:



$$\hat{A} = \frac{B\hat{A}'C}{2}, \hat{A}' = \frac{B\hat{A}C}{2} \Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = \frac{B\hat{A}'C}{2} + \frac{B\hat{A}C}{2} = \frac{360}{2} = 180 \Rightarrow$$
$$\hat{A} + \hat{A}' = 180$$

بنابراین زاویه $\hat{A}'$ حاده است.از طرفی: $\sin A = \left(180^\circ - A'\right) = \sin \hat{A}'$ در مثلث $A'BC$ بنابرقضیه ای داریم : $\dfrac{a}{\sin A'} = 2R$ در نتیجه:

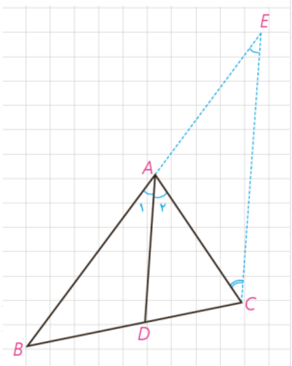
$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

ه)اثبات: از نقطه ی C خطی موازی نیمساز AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند. ذ این صورت داریم:

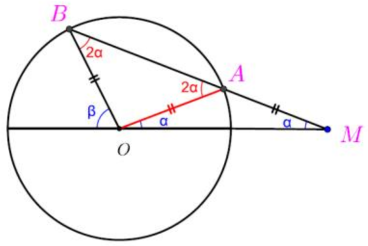
$\begin{matrix} AD \parallel EC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E} \\ AD \parallel EC \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C} \end{matrix}$ در نتیجه چون $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ بنابراین: $\hat{E} = \hat{C}$. در این صورت مثلث AEC متساوی الساقین است.

از طرفی طبق قضیه تالس در مثلث EBC $(AD \parallel EC)$ داریم:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



۵-با توجه به فرض مسئله ،مثلث های OAB و OAM متساوی الساقین هستند.در مثلث OBM داریم: $\beta = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$

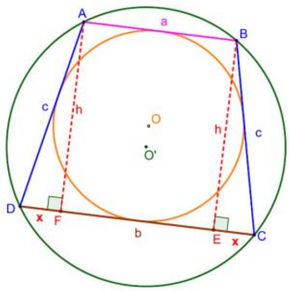


۶-

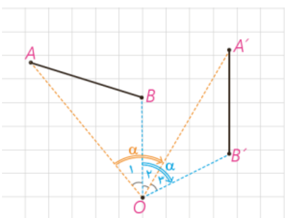
$$TT'^2 = d^2 - (R-R')^2 \Rightarrow 36 = 45 - (R-R')^2 \Rightarrow R - R' = 3$$
$$TT'^2 = d^2 - (R+R')^2 \Rightarrow 11 = 36 - (R+R')^2 \Rightarrow R + R' = 5$$
$$\Rightarrow R = 4, R' = 1$$

۷- چون ذوزنقه $ABCD$ محاطی است،پس متساوی الاضلاع است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است .در نتیجه $2b = a + b$ و مثلث ADF قائم الزاویه است.

$$2c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$$
$$b = 2x + a \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}$$
$$h^2 = c^2 - x^2 \Rightarrow h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{4ab}{4} \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$
$$s_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b) \times \sqrt{ab}$$



۸-با توجه به شکل $O_1 + O_2 = O_3 + O_2 = \alpha \Rightarrow A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$. از طرفی به کمک هم نهشتی مثلث ها داریم:



$OA = OA'$

$OB = OB'$ لذا دو مثلث AOB و $A'OB'$ بنابه حالت ض ز ض با هم همنهشت هستند در نتیجه: $AB = A'B'$

$A\hat{O}B = A'OB'$

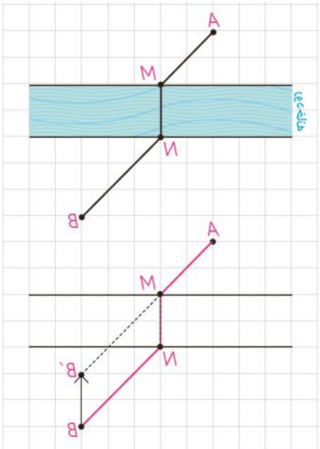
۹- الف)خیر نمی توان نقاط ثابت داشت یا به عبارتی هر نقطه باید تحت یک بردار غیر صفر در صفحه بلغزد و نمی تواند بر روی خودش بلغزد.

ب)فرض کنیم $A_1A_2...A_n$ یک n ضلعی و نقطه O مرکز تجانس و K نسبت تجانس باشد و چند ضلعی $A'_1A'_2...A'_n$ مجانس آن باشد.بنا بر تعریف تجانس

داریم: $OA'_1=|K|OA_1$ و $0A'_2=|K|O_2$ و... $0A'_n=|K|O_n \Leftarrow \frac{OA'_1}{OA_1}=\frac{OA'_2}{OA_2}=...\frac{OA'_n}{OA_n}=|k|$ پس چون اضلاع همه متناسب هستند بنا

بر قضیه ۳ تشابه نتیجه می گیریم که این دو چند ضلعی متشابهند.

۱۰- نقطه B را تحت برداری مساوی وعمود بر راستای رودخانه در جهت شهر A به نقطه B' انتقال می دهیم. سپس از B' به A وصل می کنیم تا نقطه M به دست آید. از نقطه M بر رودخانه عمود می کنیم تا نقطه N به دست آید. به این ترتیب محل احداث پل MN به دست آید به طوری که مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر است. $AMB'B=AM+MB'+B'B \Rightarrow AM+NB+MN=AMNB$

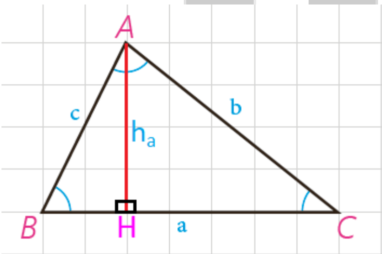


۱۱-

$S=\frac{1}{2}bc$ و $S=\frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow bc=ah_a$.دو طرف را به توان دو می رسانیم.

$$(bc)^2=(ah_a)^2 \Rightarrow b^2c^2=a^2h^2{}_a \Rightarrow b^2c^2=(b^2+c^2)h^2{}_a \Rightarrow b^2c^2=b^2h_a{}^2+c^2h_a^2 \xrightarrow{\div b^2c^2h_a^2}$$

$$\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}$$



۱۲-به کمک قضیه کسینوس ها طول ضلع خواسته شده را به دست می اوریم. $OA=60\times 0/5=30, OB=100\times 0/50=50$

$$BC^2=OA^2+OB^2-2OA.OB.\cos 120^\circ \Rightarrow 900+2500-2\times 3\times 50\times\left(-\frac{1}{2}\right)=4900 \Rightarrow$$

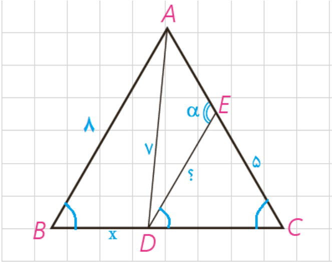
$$AB=70km$$

۱۳-

$$7^2=x^2+8^2-2\times x\times 8\times\cos 60^\circ \Rightarrow 49=x^2+64-8x \Rightarrow$$

$$x^2-8x+15=0 \Rightarrow (x-5)(x-3)=0 \Rightarrow x=5, x=3, \underrightarrow{BD<DC}, BD=3, DC=5$$

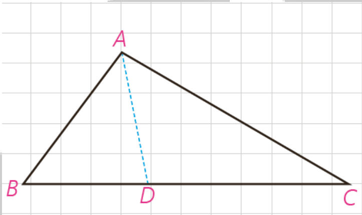
چون $DC = CE = 5$ در نتیجه مثلث DCE متساوی الساقین است و چون یک زاویه ۶۰ درجه دارد پس متساوی ا لاضلاع است یعنی $DE = 5$.



$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{BD+CD}{CD} = \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{8}{CD} = \frac{9}{5} \Rightarrow CD = \frac{40}{9}$$

-۱۴

$$BD = 8 - \frac{40}{9} = \frac{32}{9}$$



۱۵-با توجه به این که مثلث ADE متساوی الساقین است پس $D\hat{A}E = 60^\circ$ در نتیجه:

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BCED} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47}{4}\sqrt{3}$$